GEOGRAFIE – SBORNÍK ČESKÉ GEOGRAFICKÉ SPOLEČNOSTI
ROK 1999 ● ČÍSLO 4 ● ROČNÍK 104

RADEK DUŠEK

LOXODROMA V MATEMATICKÉ KARTOGRAFII

R. Dušek: *Loxodrome in mathematical cartography.* – Geografie – Sborník ČGS, 104, 4, pp. 257 – 267 (1999). – The history of loxodrome is described in detail. The inaccuracies and errors related to loxodrome including its definition and significance are shown and clarified with the help of examples from the present cartographic literature. Facts usually omitted in cartography are presented, i.e. uncertainty of definition using two points and real picture in the Mercator projection. Problems related to the length of loxodrome and its parts are numerically solved and graphically presented. Loxodrome offers unsolved issues even in present days.
KEY WORDS: mathematical cartography – loxodrome – Mercator projection – navigation.

1. Úvod

Při povrchním hodnocení se může zdát, že téma „loxodroma“ nemůže pro matematickou kartografii přinést nic nového, že za několik století vývoje matematické kartografie je již problematika loxodromy vyčerpána. V příspěvku je ukázáno, že tomu tak není. Na konkrétních příkladech z české kartografické a geografické literatury je doloženo, že i v této elementární oblasti existuje celá řada nejasností, nepřesností i omylů.

Rozvoj výpočetní techniky přináší i do matematické kartografie nové metody a postupy a umožňuje mimo jiné nové pohledy i na klasické oblasti kartografie. Sílu výpočetní techniky je možné využít zejména ve dvou směrech. Je to možnost nahradit dříve užívané přibližné metody exaktními výpočty a dále využít numerické postupy pro řešení obecných problémů. Oba postupy nacházejí uplatnění v současné matematické kartografii a jsou použity i v případě studia loxodromy.

2. Historie loxodromy

Loxodroma je sice úzce spjata s námořní plavbou, ale obrácený vztah – tedy sepětí námořní plavby s loxodromou – není již tak jednoznačný. Důvodem je skutečnost, že po větší část historie mořeplavectví nebyla loxodroma známa. Aby mohla být loxodroma využívána v námořní navigaci, jsou nezbytné dva požadavky: 1. principem navigace musí být určování směru od poledníku – tedy azimutu (v jazyce kartografie) neboli kurzu (v jazyce námořní navigace), 2. musí být známa existence loxodromy.

První předpoklad se začal naplňovat evropskou astronomickou navigací[1] a v plném rozsahu byl splněn užíváním kompasu. Počátky užívání kompasu

---

[1] Navigace podle hvězd nebo Slunce nemusí nutně vést k určování azimutů. Evropští a arabští námořníci používali nautickou astronomii vztaženou k jednomu bodu, k severnímu pólu. Veškerá snaha byla zaměřena k určení severu. Naproti tomu Polynésané využívali k navigaci pohyb hvězdné oblohy. Poměrně složitý způsob vyžadující dobrou paměť a vynikající prostorovou představivost, ale bez potřeby jakýchkoli matematických znalostí umožňoval plavbu přímo po ortodromě.

v Evropě jsou datovány do 12. století a je tedy zřejmé, že před touto dobou nemohla být loxodroma při plavbě užívána. Obdobně není loxodroma využívána u některých moderních metod navigace, které nejsou založeny na orientaci k severu, jako je např. radiová navigace, družicová navigace nebo inerciální polohové systémy.

Ani běžné užívání kompasu však nevedlo k využívání loxodromy. Lodě sice pluly pod stálým (magnetickým) kurzem a tedy po loxodromě, ale mořeplavci se domnívali, že plují nejkratší cestou – po ortodromě. Vzdálenosti byly dokonce počítány pomocí Pythagorovy věty, bez ohledu na sbíhavost poledníků – s tou se začalo počítat až po roce 1513. Vlastní loxodromu „objevil" Pedro Nuñez roku 1550. Pedro Nuñez (1492 až 1578), známější pod svým zlatinizovaným jménem Pietrus Nonius, byl profesorem matematiky v Coimbře a byl hlavní osobou portugalské navigační vědy. Pomocí diagramu dokázal, že čára stejného kurzu není hlavní kružnicí, ale spirálou blížící se k pólu. Zkonstruoval řadu pomůcek pro navigaci, mimo jiné přístroj k měření deklinace. Do dnešní doby se jeho jméno zachovalo v označení pomocné stupnice posuvného měřítka (nonius) sloužící k určování zlomků dílku hlavní stupnice, jejíž princip je využíván i u zobrazovacích trojúhelníků. Historie loxodromy se tedy začíná psát od roku 1550. Její praktické užívání ale ještě čekalo na jeden významný podnět, a tím byla proslavená Mercatorova mapa.

Mapu světa v konformním válcovém zobrazení vydal Mercator roku 1569. V době svého vydání nebyla mapa, resp. použité zobrazení, doceněna a Mercator se za svého života nedočkal náležitého uznání. Teprve několik dalších vydání mapy po Mercatorově smrti prosadilo zobrazení pro konstrukci námořních map. Mercatorova mapa přinesla sice značný pokrok pro praktickou navigaci, pro teorii však tolik přínosná nebyla, protože Mercator mapu vydal bez matematického vysvětlení jak byla zkonstruována zeměpisná síť. Místo matematického odvození pouze slovně popsal postup konstrukce: „Gradus latitudinum versus utrumque polum auximus pro incremento paralellorum supra rationem, quam habent ad aequinoctialem" (Šířkové stupně pro vzdálenost rovnoběžek směrem k oběma pólům zvětšujeme v takovém poměru, v jakém se sbíhají poledníky). První matematické vysvětlení poskytl roku 1594 anglický kartograf Edward Wright, když vyjádřil vzdálenost obrazu rovnoběžky od rovníku řadou sekant. Analytický, dnes užívaný výraz nalezl až roku 1645 Bond.

3. Loxodroma jako slovo

Pojem loxodroma je původem z řeckého λοξόζ (loxos) – kosý a δρομόζ (dromos) – běh nebo dráha. Českými – méně užívanými ekvivalenty – jsou kosoběžka, kosmice, šikmoběžka nebo šikmice. V některých případech je popisována jako klinogonální trajektorie, tedy nakloněná či skloněná dráha, křivka. Anglicky loxodrome nebo rhumb line nebo spherical helix, německy Loxodrome nebo Raumkurve. Druhé uváděné výrazy mají svůj původ v námořnickém způsobu měření úhlů, resp. magnetických azimutů, v rumbech neboli námořních čárkách (angl. rhumb nautical). Celý kruh je rozdělen na 32 (2^5) čárek a jedna námořní čárka[2] se tedy rovná 11°15′.

[2] Na rozdíl od čárky dělostřelecké, která je 1/6 400 celého kruhu.

4. Loxodroma v kartografické literatuře

4.1. Definice

Je zajímavé, že v drtivé většině publikací o matematické kartografii je loxodroma definována pomocí značně vágního a blíže nespecifikovaného pojmu „úhel protnutí", tedy jako křivka protínající poledníky pod stejným (stálým, konstantním apod.) úhlem. Úhel protnutí není v kartografii nikde blíže určen a umožňuje tak různé interpretace počátku úhlu, směru jeho měření i jeho rozsahu. Uvedená skutečnost je překvapivá zejména proto, že v kartografii je definován azimut právě pro zabránění nejistoty při určování směrů. Azimut tak umožňuje jasnou a jednoznačnou definici loxodromy. Taktéž v rovnici loxodromy není uváděn úhel protnutí, ale výhradně azimut. Definiči pomocí azimutu užívá pouze Hojovec, Buchar (1996) a Brázdil a kol. (1988). Pojem „úhel protnutí" byl zřejmě převzat z matematiky, kde má ovšem poněkud odlišný význam, protože jak uvádí Rektorys a kol. (1963) leží jeho hodnota pouze v intervalu $(0; \pi/2)$ a dále je směr měření úhlů v matematice odlišný od směru měření azimutů v kartografii.

Další ne příliš výstižnou a hojně užívanou částí definice loxodromy je zmínka o všech polednících, formulovaná např. ve tvaru: „protínající všechny poledníky". Je zřejmé, že pro azimut 0° nebo 180° a tedy pro případ, kdy loxodroma splývá s poledníkem, je problematický jak výraz „protínající", tak zejména uvádění „všech poledníků". Zmínku o protínání poledníků je možné zcela vynechat, pokud se loxodroma definuje pomocí azimutu např. jako křivka na referenční ploše, jejíž azimut je v celém průběhu konstantní.

K předchozím dvěma odstavcům je třeba uvést, že se nejedná o kritiku populárních výkladů o loxodromě, ale o hodnocení definic užívaných v odborné literatuře. Za všechny je možné uvést jeden příklad. Ve Slovníku geodetického a kartografického názvosloví je loxodroma popsána jako „křivka na ploše protínající všechny poledníky pod stejným úhlem". V této definici se tedy objevují oba zmíněné nedostatky a uvedený text tak sice podává povšechnou informaci o loxodromě, není však možné považovat ho za jednoznačnou a vyčerpávající definici. V tomto případě je nedůslednost umocněna určením publikace a nelze se pak divit, že někteří autoři tuto definici přebírají.

4.2. Historické hledisko

Podrobné probírání historie není náplní matematické kartografie a tak se lze setkat pouze se stručnými odkazy přibližujícími využití loxodromy, případně vznik Mercatorova zobrazení. I na malém prostoru věnovanému historickým okolnostem je možné nalézt několik nepřesností. Nejčastějším omylem je přisuzování loxodromě pouze historické role. Jako příklad je možné uvést hodnocení loxodromy, resp. Mercatorova zobrazení, které uvádí Hanzl (1997): „Má sice velké zkreslení u pólů, ale loxodroma se zobrazí jako přímka, což mělo význam pro námořní plavbu v době, kdy pro navigaci byl používán kompas." Nahlédnutím do současných učebnic navigace je snadné se přesvědčit, že magnetický či gyroskopický kompas je pro navigaci používán i v dnešní době a loxodroma proto není pouze historickou záležitostí. Dnes sice již není jedinou možností navigace, ale své zatím nezastupitelné místo má stále nejen v námořní, ale i v letecké dopravě.

S poměrně kuriózním historickým omylem je možné se setkat v publikaci Hojovce a Buchara (1996), kde je uvedeno: „Vzhledem k uvedené vlastnosti je

Mercatorova mapa důležitá pro námořní a leteckou dopravu a její využití, zejména ve středověku, bylo značné." S ohledem na dobu vydání Mercatorovy mapy a její postupnou popularizaci vyplývá, že pro „klasickou" dataci počátku novověku do roku 1492 nebyla možnost jejího využití ve středověku žádná. Pro modernější pojetí dějin a posunutí počátku novověku do roku 1640 bylo středověké využití mapy skutečně minimální.

4.3. Asymptotický bod a délka loxodromy

Je všeobecně známo a při zmínce o loxodromě vždy (v různých obměnách) uváděno, že pro obecný azimut se jedná o spirálu, pro kterou je pól asymptotickým bodem. Tato informace může být, a studenty kartografie často skutečně je, nesprávně interpretována jako skutečnost, že loxodroma má nekonečnou délku. Tento chybný názor uvádí Novák, Murdych (1988) i Hojovec a kol. (1987): „Každá loxodroma s azimutem jiným než 0°, 90°, 180° nebo 270° vytváří na referenční ploše spirálu, která se neustále přibližuje zemskému pólu, teoreticky však se do něj dostane až po nekonečně dlouhé dráze." Omyl je zřejmě způsoben spojením asymptotického bodu s asymptotou, která je známa jako mezní poloha tečny, vzdaluje-li se bod dotyku do nekonečna. Asymptotický bod nijak nesouvisí s nekonečnou délkou, jedná se o bod, kterému se křivka (loxodroma), lépe bod probíhající křivku, neomezeně přibližuje. Loxodroma se k pólu přibližuje nekonečným počtem stále se zmenšujících závitů, ale její délka je konečná (obdobně jako může být konečný součet nekonečné řady). Konstatování o konečné délce loxodromy by bylo vhodné uvádět vždy společně s údajem o asymptotickém bodu. Jediným příkladem názorného objasnění této problematiky je práce Brázdila a kol. (1988). Fakt o konečné délce loxodromy je možné poměrně snadno odhalit ze známého vztahu udávajícího délku oblouku loxodromy mezi dvěma body o různé zeměpisné šířce

$$d_{12} = R \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\cos A} ,$$

kde R je poloměr referenční koule a A je azimut loxodromy. Je zřejmé, že do vztahu je možné dosadit za rozdíl šířek π a získat tak délku celé loxodromy.

Ve vztahu loxodromy a pólů vyvstává ještě nejasnost ohledně počátku a konce loxodromy. Při definici loxodromy pomocí azimutu je v podstatě definován i směr loxodromy a jeden z pólů je potom „počátkem" a druhý „koncem" loxodromy. Uvozovky naznačují, že póly nejsou body loxodromy a nemohou tedy být jejím skutečným počátkem či koncem. Přesnější by bylo konstatování, že bod pohybující se po loxodromě se od jednoho pólu vzdaluje a ke druhému se přibližuje.

4.4. Symetrické souřadnice

O symetrických (izometrických) souřadnicích se v kartografické literatuře pojednává převážně v úvodních kapitolách společně s ostatními souřadnicovými systémy. Jejich použití, např. při odvozování konformních zobrazování, se již uvádí méně často. Právě loxodroma je vhodné téma pro prezentaci symetrických souřadnic, kdy se vychází z diferenciální rovnice

$$\mathrm{tg}\, A = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}Q} ,$$

kde Q je izometrická šířka,

$$Q = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ \right) .$$

Odvození loxodromy pomocí symetrických souřadnic užil Hanzl (1997).

5. O čem se nikde nepíše

5.1. Zadání dvěma body

Nejčastěji řešenou úlohou týkající se loxodromy je určení azimutu loxodromy procházející dvěma danými body. Řešení je možné získat dosazením zeměpisných souřadnic do rovnice loxodromy

$$\operatorname{tg} A = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_2}{2} + 45^\circ \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1}{2} + 45^\circ \right)} . \qquad (1)$$

Až na případné problémy s určením kvadrantu azimutu se jedná o jednoduchý, rutinní výpočet a pro potřeby navigace je výsledek správný. Z hlediska matematické kartografie je nutné konstatovat, že úloha není jednoznačně řešitelná, neboť dva body loxodromu jednoznačně neurčují. Tato skutečnost je v kartografické literatuře zcela opomíjena.

Nejednoznačnost zadání je dána tím, že obecně je loxodroma spirála dosahující jednotlivými závity opakovaně stejné zeměpisné délky. Vzhledem k tomu, že rozsah zeměpisné délky (–180°, +180°) neumožňuje uvážit „vícenásobné obtáčení okolo Země“, je třeba doplnit rovnici o další člen, který tuto informaci upřesní. Rovnice s uvážením počtu závitů má tvar:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + n \,.\, 2\pi}{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_2}{2} + 45^\circ \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1}{2} + 45^\circ \right)} . \qquad (2)$$

kde n je celé číslo.

Z tohoto tvaru rovnice vyplývá, že pro jednoznačné určení loxodromy procházející dvěma body je nutné ještě stanovit hodnotu n. Pokud $n = 0$, přechází rovnice v běžně užívaný tvar a za předpokladu, že $\lambda_2 - \lambda_1 < \pi$ (tento předpoklad je většinou splněn, ale obecně je pro dva body možné stanovit dvě hodnoty rozdílu zeměpisných délek), odpovídá vypočtený azimut loxodromě, která spojuje body nejkratším obloukem – tedy případ vhodný pro plavbu či let z jednoho bodu do druhého. Pro $n > 0$ sice vytvoří oblouk loxodromy n celých závitů než dosáhne druhého bodu (pro praktickou dopravu ne příliš vhodná řešení), ale loxodroma prochází oběma danými body a plně tedy vyhovuje zadání. Pokud se za n zvolí –1, potom oblouk loxodromy spojuje oba body „zadem“. Oblouk loxodromy je kratší než jeden závit a azimut se nachází v sousedním kvadrantu než u varianty pro $n = 0$. Jestliže $n < -1$, potom loxodroma vytváří $|n + 1|$ celých závitů než dosáhne druhého bodu.

Pokud dva body neleží na stejné rovnoběžce, potom je možno jimi vést nekonečně (ale spočetně) mnoho loxodrom. Loxodroma je tedy jednoznačně dána buď bodem a azimutem nebo dvěma body a počtem závitů mezi nimi.

Skutečnost, že dva body neurčují loxodromu jednoznačně, může svádět ke snaze „dourčit" ji bodem třetím. Tento postup však nevede k očekávanému výsledku, protože třemi obecnými body je loxodroma „přeurčena". S výjimkou náhodně vhodné konfigurace bodů se pro tři body nepodaří nalézt řešení.

Pro zcela jednoznačné určení loxodromy musí být dán i pól, resp. póly. V kartografii i geografii se automaticky předpokládají póly geografické a tedy i geografický (astronomický) azimut. Teoreticky je možné definovat loxodromu pro libovolné kartografické souřadnice, z praktického hlediska přichází v úvahu ještě možnost pólů magnetických. Plavba pod stálým magnetickým azimutem v důsledku magnetické deklinace neprobíhá po geografické loxodromě, ale po loxodromě „magnetické", pro kterou jsou asymptotickými body magnetické póly. Při uvádění souvislostí mezi loxodromou a navigací se v kartografické literatuře vždy předpokládá znalost astronomického azimutu, resp. problematika deklinace není zmiňována.

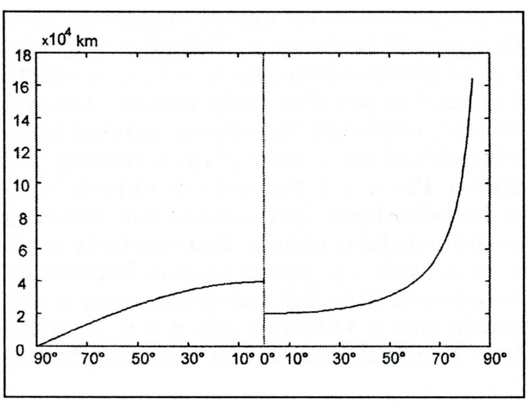
5.2. Obraz loxodromy v Mercatorově zobrazení

Při uvádění vlastností či výhod Mercatorova zobrazení je v některých případech (např. Pyšek 1991, Kuchař 1979) uváděno, že obraz loxodromy je přímkový. Tato charakteristika je vcelku správná za předpokladu, že přímkový obraz znamená „mající charakter přímky" neboli „je to přímka či její část". V jiných případech je uváděno, že obrazem loxodromy je přímka (např. Brázdil a kol. 1988, Hanzl 1997, Hojovec, Buchar 1996). Toto konstatování již správné není. Ve skutečnosti je přímka obrazem loxodromy pouze v případě ztotožnění loxodromy s poledníkem V případě shodnosti s rovnoběžkou se jedná o úsečku a pro obecný azimut mimo 0°, 90°, 180° a 270° je obrazem loxodromy soustava nekonečného počtu rovnoběžných, stejně dlouhých a stejně od sebe vzdálených úseček.

6. Několik numerických řešení úloh týkajících se loxodromy

6.1. Délka loxodromy

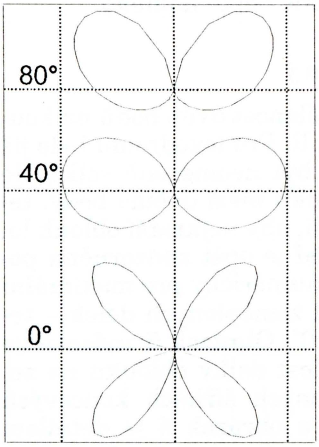
Pokud je délka loxodromy konečná, jak je uvedeno výše, potom se nabízí otázka jakých hodnot může tato délka nabývat. Rozborem vzorců je možné získat odpověď numericky vyjádřenou grafem na obrázku 1. V pravé části grafu je znázorněna závislost délky loxodromy na azimutu



Obr. 1 – Graf délky loxodromy – vlevo závislost délky na zeměpisné šířce pro azimut 90°, vpravo závislost délky na azimutu (φ = konst.).

(R = 6 378 km). Azimut je uvažován pouze v rozsahu ⟨0°, 90°), protože je zřejmé, že pro zbývající kvadranty jsou délky loxodrom stejné. Graf ukazuje nárůst délky od cca 20 000 km – loxodroma totožná s poledníkem – až k libovolně se zvětšující hodnotě pro A → 90°. Druhá, levá část grafu ukazuje závislost délky loxodromy na zeměpisné šířce pro A = 90°. Jedná se vlastně o délky rovnoběžek pro odpovídající φ. Délka klesá od cca 40 000 km (rovník) se zvětšující se zeměpisnou délkou. Jestliže φ → 90°, potom d → 0. Ze sjednocení obou částí grafu vyplývá, že délka loxodromy může nabývat hodnot (0, ∞). Tento rozsah je nezávislý na poloměru referenční koule.

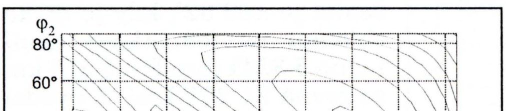
6.2. Rozdíl mezi délkami oblouku ortodromy a loxodromy



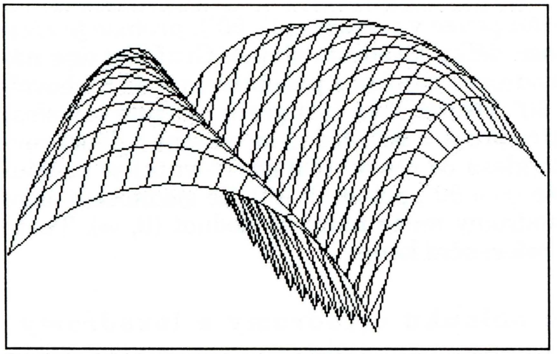
Obr. 2 – Závislost rozdílu délek oblouků ortodromy a loxodromy na azimutu a zeměpisné šířce. Rozdíly v závislosti na azimutech jsou znázorněny pro tři zeměpisné šířky.

V literatuře (např. Brázdil a kol. 1988) je uváděno, že maximální rozdíl je pro loxodromu o azimutu 90°. Tento údaj není přesný, protože rozdíl nezávisí pouze na azimutu, ale i na délce oblouku a zejména na zeměpisné šířce, což lze snadno doložit na příkladu rovníku. Pro dva body ležící na rovníku je azimut loxodromy 90° a přesto je rozdíl mezi ortodromou a loxodromou nulový. Na obrázku 2 jsou schematicky znázorněny rozdíly mezi křivkami pro tři různé zeměpisné šířky a pro oblouk ortodromy o délce R . π/20 (na Zemi cca 1 000 km). Pro jednotlivé azimuty jsou vyneseny rozdíly křivek a vznikly tak tři polární grafy, ze kterých je patrné, že rozdíl závisí na zeměpisné šířce i na azimutu, např. pro rovník jsou nulové rozdíly pro směr poledníku a rovníku a maximální rozdíly jsou ve směrech os jednotlivých kvadrantů.

Numerické řešení maximálního rozdílu je zachyceno grafem na obrázku 3. Rozdíly jsou spočítány pro maximální hodnotu zeměpisných délek, tedy pro 180°, a pro zeměpisné šířky obou bodů v intervalu ⟨–85°,+85°⟩ – viz osy grafu. Křivky grafu jsou izolinie stejného rozdílu a v rovině znázorňují plochu, jejíž tvar je naznačen na obrázku 4. Z obou obrázků vyplývá, že velikost rozdílu roste od středu grafu, kde pro bod grafu $\varphi_1 = 0°$, $\varphi_2 = 0°$, tedy případ, kdy oba koncové body leží na rovníku, je roven nule, až k bodům grafu $\varphi_1 = -40°$, $\varphi_2 = -40°$, resp. $\varphi_1 = +40°$, $\varphi_2 = +40°$, kde nabývá maximálních hodnot. Pomocí podrobnějšího grafu nebo výpočtem je možné stanovit přesnější polohu koncových bodů, pro kterou je rozdíl maximální, a sice rovnoběžky 39°33′ a –39°33′. Maximální rozdíl nabývá na jedno-



Obr. 3 – Závislost rozdílu mezi obloukem ortodromy a loxodromy na zeměpisných šířkách koncových bodů – křivky stejného rozdílu jsou počítány pro maximální rozdíl zeměpisných délek.

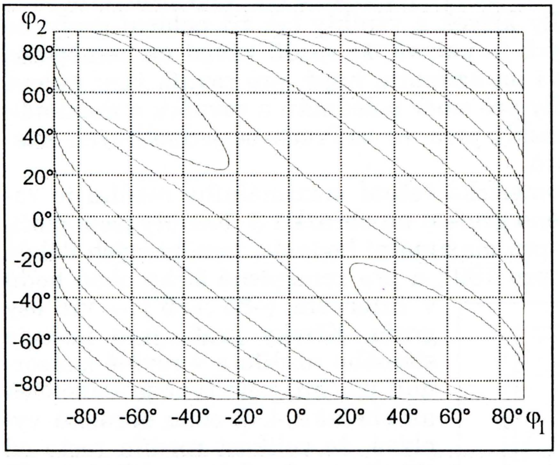


Obr. 4 – Pohled na matematickou plochu znázorněnou na obrázku 3

tkové kouli hodnoty 0,661348, což je pro Zemi (referenční koule R = 6 378 km) hodnota 4 218,078 km. Řešení vychází z předpokladu, že body jsou spojeny nejkratším obloukem loxodromy. Obecně je možné dva body neležící na stejné rovnoběžce spojit částí loxodromy o libovolné délce a teoreticky tak může rozdíl mezi ortodromou a loxodromou nabývat neomezeně velké hodnoty.

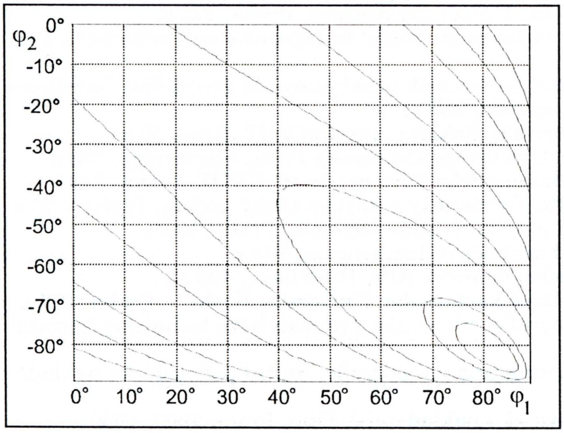
6.3. Oblouk loxodromy

V případě ortodromy je zřejmé, že maximální vzdálenost dvou bodů na kouli a tím i maximální délka oblouku ortodromy[3] je π . R. Pro loxodromu bylo již dříve uvedeno, že maximální délka oblouku může být neomezeně velká. Je však možné hledat maximální nejkratší délku oblouku mezi dvěma body, tedy řešit úlohu: „Jak musí být umístěny body na kouli, aby nejkratší oblouk loxodromy mezi nimi měl maximální délku?“ Odpověď je opět znázorněna pomocí grafů na obrázcích 5 a 6. Řešení bylo hledáno numericky pro maximální rozdíl zeměpisných délek – tedy 180°. Obrázek 5 znázorňuje závislost délky oblouku na zeměpisných šířkách koncových bodů a obrázek 6 je detailem zhruba čtvrtiny grafu – pro přesnější identifikaci výsledku. Z obrázků vyplývá, že maximální nejkratší oblouk loxodromy je pro zeměpisné šířky bodů +80° a –80°. Přesným řešením je ±82°02′, kdy je délka oblouku na jednotkové kouli rovna 3,3241 (pro R = 6 378 km se rovná 21 201 km). Z uvedených hodnot délek je patrné, že maximální délka oblouku loxodromy je jen o málo (5,8 %) větší než maximální délka ortodromy.



Obr. 5 – Délky nejkratších spojnic obloukem loxodromy v závislosti na zeměpisných délkách koncových bodů

[3] Ortodroma je v kartografii ještě základnějším pojmem než loxodroma, a přesto ani její definice není uváděna jednotně. Někteří autoři (např. Hojovec, Buchar 1996) definují ortodromu jako hlavní kružnici a vzdálenost dvou bodů je potom oblouk ortodromy, jiní autoři (např. Novák, Murdych 1988) uvádějí ortodromu pouze jako kratší oblouk hlavní kružnice mezi dvěma body. Potom výraz délka ortodromy může mít dva zcela odlišné významy. Zde je ortodroma chápána ve smyslu prvním, tedy jako hlavní kružnice a vzdáleností bodů se rozumí kratší oblouk ortodromy.



Obr. 6 – Detail grafu z obrázku 5 pro lepší znázornění maxima

7. Závěr

Vzhledem ke své matematické povaze je matematická kartografie exaktní obor, a je proto překvapivé, že pro tak elementární pojem, jakým loxodroma bezesporu je, se lze setkat s řadou nepřesností i s podstatnými omyly. Záměrem při uvádění jednotlivých příkladů bylo nejen problematiku objasnit, ale také naznačit možné příčiny, které vedly k nepřesným závěrům. Mimo jednotlivé konkrétní příčiny mohou být společným jmenovatelem i dvě obecné skutečnosti: 1. loxodroma je chápána jako základní, „triviální" a ne příliš aktuální oblast kartografie, která nevyžaduje větší pozornosti; 2. teoretický, širší pohled matematické kartografie na loxodromu je některými geografy a kartografy nahrazován praktickým a užším pohledem navigace.

Vedle příkladů ze současné kartografické literatury jsou o loxodromě uvedeny některé nové poznatky získané převážně numerickou cestou. Numerické řešení bylo upřednostněno před klasickým odvozováním zejména z důvodů grafické názornosti, která umožňuje vytvoření představy o celém průběhu funkcí a neumožní tak pouze uvést hodnoty výsledků.

Řešení několika úloh, převážně o délce loxodromy, zdaleka nevyčerpává možnosti, jak se loxodromou zabývat. Rozsáhlou oblastí je průběh loxodromy v jednotlivých zobrazeních. Tento problém je doposud řešen poukazem na využití Mercatorova zobrazení pro zákres loxodromy, ale tato grafická a víceméně přibližná metoda již neodpovídá možnostem současné výpočetní techniky ani úrovni počítačové kartografie. Další možností je aplikace loxodromické geometrie v kartografii. Loxodromická geometrie je v matematice obecně definována na rotační ploše a její podstatou jsou trojúhelníky tvořené oblouky loxodrom. Je zřejmé, že součet úhlů v takovém trojúhelníku je 180° obdobně jako v trojúhelníku rovinném. V kartografii dosud tato metoda nebyla využita. Pro řešení složitějších úloh je však nezbytné, aby byly vyřešeny otázky týkající se základních pojmů.

Je tedy možné konstatovat, že ani po více než 400 letech není téma „loxodroma" zcela vyčerpáno.

Literatura:

Aplikovaná matematika I. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1977, 1124 s.
BALSER, L. (1951): Einführung in die Kartenlehre (kartennetze). B. G. Teubner Verlagsgesellschlaft, Leipzig, 64 s.
BIERNACKI, F. (1949): Teoria odwzorowań powierzchni dla geodetow i kartografów. Głowny urząd pomiarów kraju, Warszawa, 375 s.
BRÁZDIL, R. a kol. (1988): Úvod do studia planety Země. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 365 s.
BUDINSKÝ, B. (1983): Analytická a diferenciální geometrie. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 296 s.

ČAPEK, R. (1986): Příklady z kartografie. Univerzita Karlova, Praha, 178 s.
ČAPEK, R. a kol. (1992): Geografická kartografie. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 375 s.
GALON, R. (1951): Siatki kartograficzne, podręcznik praktyczny dla geografów. Państvove zakłady wydawnictw szkolnych, Warszawa, 223 s.
HANZL, V. (1997): Matematická kartografie. Fakulta stavební VUT, Brno, 55 s.
HINKS, R. A. (1921): Map Projections. Cambridge University Press, Cambridge, 158 s.
HOJOVEC, V., BUCHAR, P. (1996): Matematická kartografie 10. ČVUT, Praha, 210 s.
HOJOVEC, V. a kol. (1987): Kartografie. Geodetický a kartografický podnik, Praha, 660 s.
JÜRGENS, H. P. (1981): Všechny lodě plují k břehům. Olympia, Praha, 232 s.
KADEN, H. W. (1955): Kartographie. Fachbuchverlag, Leipzig, 204 s.
KEVICKÝ, D. (1980): Navigácia v leteckej doprave. Alfa, Bratislava, 493 str.
KUCHAŘ, K. (1979): Přehled matematické kartografie. Univerzita Karlova, Praha, 127 s.
KUSKA, F. (1960): Matematická kartografia. Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 476 s.
NOVÁK, V., MURDYCH, Z. (1988): Kartografie a topografie. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 320 s.
Ottův slovník naučný – XVI. díl. Vydavatel a nakladatel J. Otto, Praha 1900, 1060 s.
PYŠEK, J. (1991): Kartografie a topografie, I. kartografie. Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 208 s.
REKTORYS, K. a kol. (1963): Přehled užité matematiky. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1140 s.
RÓŻYCKY, J. (1978): Kartografia matematyczna. Państvove wydawnictwo naukowe, Warszawa, 334 s.
Slovník geodetického a kartografického názvosloví. Geodetický a kartografický podnik, Praha 1984, 249 s.
ŠMEJKAL, J. (1946): Technické křivky geometrické v praxi. Česká grafická unie, Praha, 180 s.
The Art of Cartography. Pomegranate Artbooks, San Francisco 1991.
UHLIG, L., HOFFMANN, P. (1984): Automatisierung der Navigation. VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin, 168 s.
WRÓBEL, F. (1987): Nawigacja morska. Zadania z objaśnieniami 1. Wydawnictwo Morskie, Gdańsk, 403 s.

Summary

LOXODROME IN MATHEMATICAL CARTOGRAPHY

Loxodrome has not been a part of cartography since its beginning. It was not until 1550 when Pietrus Nonius found the properties of the stable course trajectory. It took another one hundred years until it found its place in cartography, mainly thanks to Mercator.

Although loxodrome is today one of the main features of mathematical cartography, there are numerous inaccuracies and errors in the Czech technical literature. They include mainly an imprecise definition, an erroneously stated infinite length describing loxodrome picture in the Mercator projection as a straight line, and giving loxodrome only a historical significance. The fact that loxodrome is not sufficiently defined by two points and that for a sufficient definition it is necessary to determine the number of turns between the points is entirely omitted. For an unambiguous solution it is necessary to amend the equation (1) to the equation (2), where n is an integer.

Problems related to the length of loxodrome are solved numerically and the results are presented in graphs on figures 1 – 6. The interval $(0, \infty)$ was defined for the length of loxodrome – see figure 1. The maximum difference of lengths of arcs of orthodrome and loxodrome between two points was found using figures 3 and 4 for points lying on parallels $\pm 39°33'$ having the maximum difference of longitudes. When searching for location of points for which the shortest arc of loxodrome has the maximum value, opposite points with latitude $\pm 82°02'$ were found. This maximum arc of loxodrome is longer only by 5.8 % than the arc of orthodromic curve.

Even today loxodrome offers some unanswered questions, for example exact determination of the course of presentation of loxodrome in individual cartographic projections.

Fig. 1 – Graph of length of loxodrome – the right part shows the dependence of length on azimuth, the left part shows the dependence of the length on latitude, and that for a 90° azimuth.
Fig. 2 – Dependence of the difference of lengths of arcs of loxodrome and orthodrome on azimuth and latitude. Differences in dependences on azimuths are shown for three latitudes.
Fig. 3 – Dependence of the difference between the arcs of loxodrome and orthodrome on the latitudes of end points – curves of the same difference are calculated for the maximum difference of longitudes.
Fig. 4 – View of the mathematical surface shown in figure 3.
Fig. 5 – Lengths of the shortest connecting lines in the loxodrome arc based on the latitudes of end points.
Fig. 6 – Detail of graph from figure 5 for better illustration of the maximum.

(Pracoviště autora: katedra fyzické geografie a geoekologie Přírodovědecké fakulty OU, 30. dubna 22, 710 00 Ostrava.)

Do redakce došlo 24. 3. 1999 *Lektorovali Richard Čapek a Vít Voženílek*